Fonction exponentielle

On admet que l'équation différentielle $\left\{ \begin{array}{rcl} f'(x) & = & f(x) \\ f(0) & = & 1 \end{array} \right.$ possède une unique fonction f solution sur $\mathbb{R}$, cette fonction f est appelée *exponentielle* et notée $f(x) = \exp(x)$.

1 Relation fonctionnelle caractérisant la fonction exponentielle

1. En étudiant la fonction $g(x) = \exp(x)\exp(-x)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\exp(x) \neq 0$ et :

$$\boxed{\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}}$$

2. En procédant par l'absurde, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\exp(x) > 0}$$

3. En étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{\exp(a+x)}{\exp(a)\exp(x)}$, montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)}$$

4. En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}}$$

et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\boxed{\exp(nx) = [\exp(x)]^n}$$

2 Étude de la fonction exponentielle

1. Montrer que la fonction exponentielle est définie, continue, dérivable, strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
2. En étudiant la fonction $g(x) = \exp(x) - x$, montrer que :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty}$$

3. En étudiant la fonction $g(x) = \exp(x) - \dfrac{x^2}{2}$, montrer que :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x\exp(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty}$$