Nombres complexes et formules trigonométriques

1 Une formule remarquable

Soit θ un nombre réel, on lui associe le nombre complexe $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$.

1. Démontrer la formule suivante pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$$

2. En déduire les formules suivantes pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} z_\theta z_{-\theta} &= 1 \\ (z_\theta)^n &= z_{n\theta} \end{aligned}$$

2 Application à la Linéarisation

1. Prouver pour tout nombre réel θ :

$$\cos\theta = \frac{z_\theta + z_{-\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{z_\theta - z_{-\theta}}{2i}$$

2. En déduire les formules suivantes :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

3. Prouver les relations suivantes :

$$\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4} \qquad \sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$

3 Application au calcul des Polynômes de Tchebychev

1. Développer z_θ^2 , en déduire que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

   Prouver la formule suivante :

$$\cos 2\theta = 2X^2 - 1 \quad , \quad X = \cos\theta$$

2. Développer z_θ^3 , en déduire la formule suivante :

$$\cos 3\theta = 4X^3 - 3X \quad , \quad X = \cos\theta$$

3. Exprimer $\cos 4\theta$ sous la forme d'un polynôme en $X = \cos\theta$.