Devoir de Mathématiques n°3

(adapté du Bac STI génie électronique de septembre 2010)

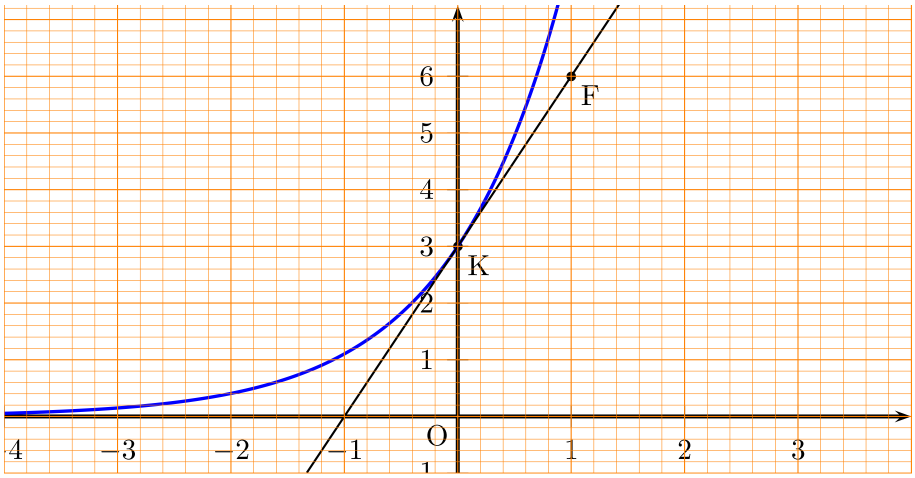
Exercice 1

Dans cet exercice, on propose pour chaque question trois réponses dont une seule est correcte. Déterminer en justifiant les réponses correctes.

1. Le nombre complexe solution de l'équation $1 + iz - 3 - i = 0$ est :
   (a) $1 - 2i$.
   (b) $2 - i$.
   (c) $2 - 2i$.
2. On considère le nombre complexe z_0 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. Le nombre complexe z_0^{2010} est :
   (a) un réel positif.
   (b) un imaginaire pur.
   (c) un réel négatif.
3. L'écriture exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est :
   (a) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   (b) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
   (c) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
4. Si $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, alors l'écriture exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}$ est :
   (a) $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
   (b) $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$.
   (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'image du point M d'affixe $z = -1 + i\sqrt{3}$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est le point M' d'affixe z' :
   (a) $z' = -\sqrt{3} + i$.
   (b) $z' = \sqrt{3} + i$.
   (c) $z' = \sqrt{3} - i$.
6. Si les points A, B, C ont pour affixes respectives $z_A = 3 + i\sqrt{3}$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$, alors le triangle ABC est :
   (a) rectangle.
   (b) isocèle.
   (c) équilatéral.

Exercice 2

La courbe fournie ci-dessous représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{bx}$ où a et b désignent deux nombres réels.



Les points K et F ont pour coordonnées respectives $(0;3)$ et $(1;6)$. La droite (KF) est tangente à la courbe au point K.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (KF).
2. À l'aide des coordonnées du point K et du coefficient directeur trouvé, déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty;2]$ par :

$$f(x) = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote dont on donnera une équation.
2. (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $]-\infty;2]$: $f'(x) = e^x(3 - e^x)$.
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty;2]$.
3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.
4. Déterminer les coordonnées du point B, intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la tangente T et la courbe $\mathcal{C}$, après avoir placé les points A et B.