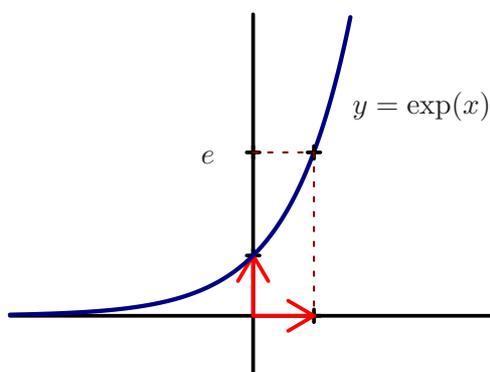


Fonctions Exponentielle et Logarithme

1 Fonction Exponentielle

Définition 1. On appelle fonction Exponentielle l'unique fonction définie sur \mathbb{R} égale à sa dérivée et valant 1 en 0, on la note $x \mapsto \exp(x)$ ou $x \mapsto e^x$ avec $e = \exp(1)$.



Propriété 1. La fonction \exp est dérivable et $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$, elle est croissante et strictement positive, de plus $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}$.

Propriété 2. La fonction \exp vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n :

1. $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$

2. $\boxed{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$

3. $\boxed{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$

4. $\boxed{e^{nx} = (e^x)^n}$

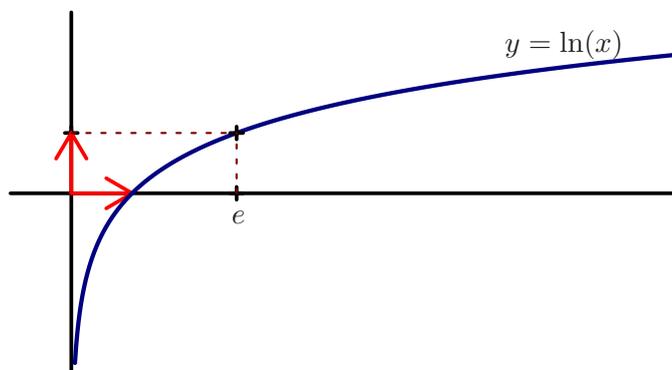
Propriété 3. Si u est une fonction dérivable, alors la fonction e^u est dérivable et $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.

Propriété 4. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0}$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$.

Remarque 1. On dit que la fonction exponentielle « l'emporte » sur les fonctions puissances.

2 Fonction Logarithme népérien

Définition 2. On appelle fonction Logarithme népérien la fonction $\ln : x \mapsto \ln(x)$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $\ln(x) = y$ avec $e^y = x$.



Propriété 5. On a $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Propriété 6. On a $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x et $e^{\ln(x)} = x$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété 7. La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété 8. La fonction \ln est croissante, négative sur $]0; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$, de plus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Propriété 9. La fonction \ln vérifie les relations suivantes pour tous nombres réels x et y strictement positifs et pour tout entier relatif n :

$$1. \quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$2. \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$3. \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$4. \quad \ln(x^n) = n \ln(x)$$

$$5. \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

Propriété 10. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur $]0; +\infty[$, alors la fonction $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Propriété 11. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

Remarque 2. On dit que les fonctions puissances « l'emportent » sur la fonction logarithme népérien.