Intégration

1 Rappels sur la dérivation

Théorème 1. *Dérivées des fonctions usuelles*

$f(x)$	*ensemble de définition*	*intervalle(s) de dérivabilité*	$f'(x)$
Cte	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	0
$ax+b$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	a
$x^n \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n} \quad , \quad n\in\mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}=-nx^{-n-1}$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
$\ln(x)$	$]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	e^x
$\cos(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$]-\infty;+\infty[$	$]-\infty;+\infty[$	$\cos(x)$

Théorème 2. *Dérivées et opérations*

- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $u+v : x\mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel alors la fonction $ku : x\mapsto k\times u(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(ku)'=k\times u'}$.
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $uv : x\mapsto u(x)\times v(x)$ est dérivable sur I et* $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$.
- *Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{1}{u} : x\mapsto\dfrac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}}$.
- *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec v ne s'annulant pas sur I alors la fonction $\dfrac{u}{v} : x\mapsto\dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et* $\boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}}$.

Théorème 3. *Dérivée d'une fonction composée*

- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *à valeurs dans un intervalle* J *et* ϕ *une fonction dérivable sur l'intervalle* J *alors la fonction composée* $\phi(u) : x \mapsto \phi(u(x))$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(\phi(u))' = u' \times \phi'(u)}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, alors la fonction* u^n , $n \in \mathbb{N}^* : x \mapsto (u(x))^n$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *à valeurs strictement positives sur* I*, alors la fonction* $\sqrt{u} : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I *à valeurs strictement positives sur* I*, alors la fonction* $\ln u : x \mapsto \ln(u(x))$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, alors la fonction* $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, alors la fonction* $\cos u : x \mapsto \cos(u(x))$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u}$.
- *Si* u *est une fonction dérivable sur un intervalle* I*, alors la fonction* $\sin u : x \mapsto \sin(u(x))$ *est dérivable sur l'intervalle* I *et* $\boxed{(\sin u)' = u' \cos u}$.

2 Notion de primitive

Définition 1. *On considère une fonction* f *définie sur un intervalle* I*. On dit que la fonction* F *est une* primitive *de la fonction* f *sur l'intervalle* I *si la fonction* F *est dérivable sur* I *avec* $F' = f$*.*

Exemple 1. *La fonction* $F(x) = 3x^2 - x + 1$ *est une primitive de la fonction* $f(x) = 6x - 1$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 1. *Déterminer une primitive de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 3x^4 - x^3 + 5$*.*

Théorème 4. *Soit* f *une fonction admettant une primitive* F *sur un intervalle* I*, alors toute primitive de* f *sur* I *est de la forme* $F + k$ *avec* $k \in \mathbb{R}$*.*

Exercice 2. *Déterminer toutes les primitives sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$*.*

Théorème 5. *Soit* f *une fonction admettant des primitives sur un intervalle* I *avec* $x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$*, alors il existe une unique primitive* F *de* f *sur* I *vérifiant la condition* $F(x_0) = y_0$*.*

Exercice 3. *Déterminer la primitive* F *de la fonction* $f(x) = x + 1$ *sur* $\mathbb{R}$ *vérifiant la condition* $F(2) = 1$*.*

3 Équations différentielles

Définition 2. *On appelle* équation différentielle *une équation dont l'inconnue est une fonction f et dans laquelle apparaît la dérivée f' de la fonction f voire la dérivée seconde f'' de la fonction f.*

Exemple 2. *La fonction f définie par $f(x) = e^x$ est solution de l'équation différentielle $f' - f = 0$.*

On notera désormais y la fonction inconnue dans l'équation différentielle.

Exercice 4. *Résoudre l'équation différentielle $y'' = 1$.*

3.1 Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 6. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $\boxed{y' = ay}$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $\boxed{f(x) = Ce^{ax}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Exercice 5. *Déterminer les fonctions f solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ vérifiant la condition $f'(0) = -6$.*

3.2 Équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème 7. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $\boxed{y'' + \omega^2 y = 0}$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$ sont les fonctions de la forme $\boxed{f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.*

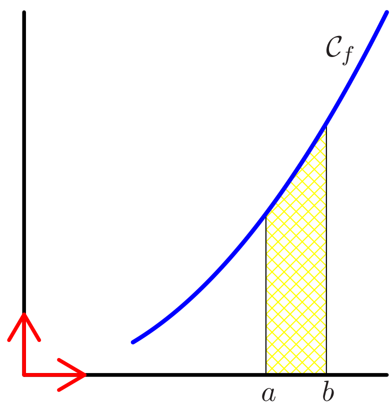
Exercice 6. *Déterminer les fonctions f solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -2$.*

4 Intégrale d'une fonction

Définition 3. *On considère une fonction f admettant une primitive F sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I. On appelle* intégrale *de la fonction f entre a et b :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

Remarque 1. *L'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie.*



Théorème 8. *Si f est une fonction positive admettant une primitive sur un intervalle I avec a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a < b$, alors l'intégrale de la fonction f est égale à l'aire (exprimée en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, le plan étant muni d'un repère orthogonal.*

Exercice 7. *Calculer $\displaystyle\int_2^3 (2x+1)\mathrm{d}x$.*

Remarque 2. $\int_a^b 0 \, \mathrm{d}x = 0$; $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ *et* $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété 1. *Relation de Chasles*
Soit f une fonction admettant une primitive sur un intervalle I et a, b et c trois réels de l'intervalle I, alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x}$$

Propriété 2. *Linéarité de l'intégrale*
Soient f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I avect k un nombre réel, alors :

$$\boxed{\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

Propriété 3. *Soient f et g deux fonctions admettant une primitive sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a \leqslant b$. Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Définition 4. *Soit f une fonction admettant une primitive sur l'intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I vérifiant $a < b$. On appelle* valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ *:*

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Exercice 8. *Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0;1]$.*