Devoir de Mathématiques n°4

Exercice 1

2 pts 1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_1^2 \left(2x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

2 pts 2. Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x + e^{2x}$ vérifiant la condition initiale $F(0) = 0$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{3}y$ où y est une fonction réelle de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1 pt 1. Résoudre cette équation différentielle.

2 pts 2. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f'(0) = 1$.

Exercice 3

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = \ln(e^x - 1) - x$.

2 pts 1. Prouver que F est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2 pts 2. Calculer la valeur exacte, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations respectives $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{4}y = 0$ où y est une fonction réelle de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et y'' sa dérivée seconde.

1 pt 1. Résoudre cette équation différentielle.

2 pts 2. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $f'(\pi) = -\frac{1}{2}$.

2 pts 3. Vérifier que $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 5

1 pt 1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' + 2y = 0$ où y est une fonction réelle de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

2. On considère l'équation différentielle (E_2) : $y' + 2y = x$ où y est une fonction réelle de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

   2 pts (a) Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (E_2).

   1 pt (b) Montrer que si f est une solution de l'équation différentielle (E_1) alors la fonction h définie par $h(x) = f(x) + g(x)$ est solution de l'équation différentielle (E_2).