

Devoir maison de Mathématiques n°1

Le Plan Complexe est muni d'un repère orthonormal direct d'unité 8cm.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit le nombre complexe $z_n = \frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{2^n}$.

1. Calculer z_0, z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2. Placer dans le Plan Complexe les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3 .
3. Calculer $|z_0|, |z_1|, |z_2|$ et $|z_3|$ puis exprimer $|z_n|$ en fonction de n . Que peut-on en déduire pour le point A_n d'affixe z_n quand n tend vers $+\infty$?
4. Calculer $|z_1 - z_0|, |z_2 - z_1|$ et $|z_3 - z_2|$. En déduire la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3$ en cm.
5. Montrer que $|z_n - z_{n-1}| = \frac{\sqrt{5}}{2^n}$ pour $n \geq 1$.
6. Montrer que la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_n$ en cm est $8\sqrt{5} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Que peut-on en déduire pour cette longueur quand n tend vers $+\infty$?