Devoir de Mathématiques n°5

Exercice 1 **(4 points)**

Une urne contient 10 boules. Sur chacune d'elles, on a inscrit un nombre suivant le tableau ci-dessous.

Nombre inscrit sur la boule	5	6	10	11	12	13	14
Nombre de boules	1	2	1	3	1	1	1

Un joueur mise 10€, tire une boule au hasard dans l'urne et reçoit en euros la somme inscrite sur la boule.

1. Le joueur joue une fois : on appelle p_1 la probabilité qu'il perde de l'argent (c'est-à-dire que le nombre inscrit sur la boule soit inférieur à 10) et p_2 la probabilité qu'il ait un gain positif ou nul.
   Calculer p_1 et p_2.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre le « gain » du joueur (une perte est un gain négatif).
   Par exemple : si le joueur tire le nombre 12 son gain est de $+2$; s'il tire le nombre 6 son gain est de -4.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   (b) Présenter la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans un tableau.
   (c) Calculer l'espérance mathématique, notée $E(X)$, de la variable aléatoire X.
   Que représente $E(X)$ pour le joueur ?
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On souhaite, en changeant le nombre inscrit sur UNE boule et une seule, rendre le jeu équitable. Proposer une solution.

Exercice 2 **(6 points)**

Pour un jeu de hasard, on place dans un sac opaque cinq jetons numérotés de 1 à 5, indiscernables au toucher.

1. Lors d'une partie, un joueur pioche au hasard dans le sac un jeton qu'il place devant lui. Il pioche ensuite au hasard un second jeton qu'il place à droite du premier, formant ainsi un nombre de deux chiffres. Le premier jeton tiré indique donc le chiffre des dizaines et le second celui des unités.
   (a) À l'aide d'un arbre, écrire les 20 nombres qu'il est possible d'obtenir.
   (b) Soit M_2 l'événement « le nombre obtenu est un multiple de 2 » et M_3 l'événement « le nombre obtenu est un multiple de 3 ».
   Démontrer que $P\left(M_2\right) = P\left(M_3\right)$.
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement A : « le nombre obtenu est un multiple de 3 qui n'est ni un multiple de 2 ni un multiple de 5 ».
2. Un joueur doit miser 3 euros pour faire une partie.
   Si le nombre obtenu est un multiple de 2, le joueur perçoit 2 euros.
   Si le nombre obtenu est un multiple de 3, le joueur perçoit 3 euros.
   Si le nombre obtenu est un multiple de 5, le joueur perçoit 5 euros.
   Les sommes perçues sont cumulatives. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45 *qui est à la fois un multiple de* 3 *et de* 5*, il perçoit* 8 *euros*).
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain (positif ou négatif) finalement réalisé par le joueur en tenant compte de la mise initiale. (*Par exemple, si le joueur obtient le nombre* 45*, la variable aléatoire* X *prend la valeur* $8 - 3 = 5$).
   (a) Démontrer que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont -3 ; -1 ; 0 ; 2 et 5.
   (b) Démontrer que $P(X = 0) = \dfrac{1}{10}$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. (a) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   (b) Le jeu est-il équitable ?