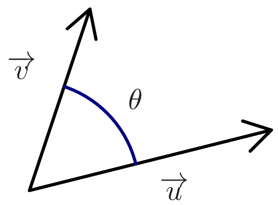
Un peu de géométrie... (partie 1)

Dans le Plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et on appelle θ l'angle orienté entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{v}$.



déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin\theta = xy' - yx'}$$

$$\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}}$$

produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta = xx' + yy'}$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ orthogonaux}}$$

Exercice 1

Dans le Plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1;6)$, $B(-4;-6)$ et $C(4;2)$.

1. Tracer le triangle ABC.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, en déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{BAC})$.
4. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, en déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$.

Exercice 2

Dans le Plan muni d'un repère orthonormal direct, on considère les points $A(1;-3)$, $B(4;1)$ et $C(-1;0)$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.
2. On appelle $M(x;y)$ un point de la droite (AB).
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   (b) En utilisant le déterminant, déterminer une équation de la droite (AB).
3. On appelle $M(x;y)$ un point de la droite perpendiculaire à (AB) en A.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   (b) En utilisant le produit scalaire, déterminer une équation de la droite perpendiculaire à (AB) en A.
4. Déterminer un équation de la droite parallèle à (AB) passant par C.
5. Déterminer un équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C.

Problème

On considère un carré $ABCD$ et on note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. On appelle P le point d'intersection des droites (CI) et (DJ), Q le point d'intersection des droites (DJ) et (AK), R le point d'intersection des droites (AK) et (BL) et S le point d'intersection des droites (BL) et (CI).

Le but de ce problème est de démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un carré dont l'aire est égale au cinquième de celle du carré $ABCD$.

Dans tout le problème, le plan est muni du repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I, J, K et L.
3. Déterminer une équation de chacune des droites (AK), (BL), (CI) et (DJ).
4. En déduire les coordonnées des points P, Q, R et S.
5. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
6. En déduire la nature du quadrilatère $PQRS$ et calculer son aire.