Baccalauréat Blanc de Mathématiques
Série sciences et techniques industrielles (STI) - Génie électronique
Lycée Gabriel Touchard - février 2011

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

L'usage des calculatrices ainsi que du formulaire est autorisé.

Le sujet comporte deux exercices ainsi qu'un problème tous indépendants les uns des autres.

La feuille annexe devra être rendue avec la copie.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 **(5 points)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^x + c\ ,$$

où $a,\ b$ et c désignent trois réels que l'on se propose de déterminer dans cette partie. On note f' la dérivée de la fonction f.

Sur le graphique ci-dessous, on donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$ d'unités graphiques 1 centimètre en abscisse et 0,25 centimètre en ordonnée.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

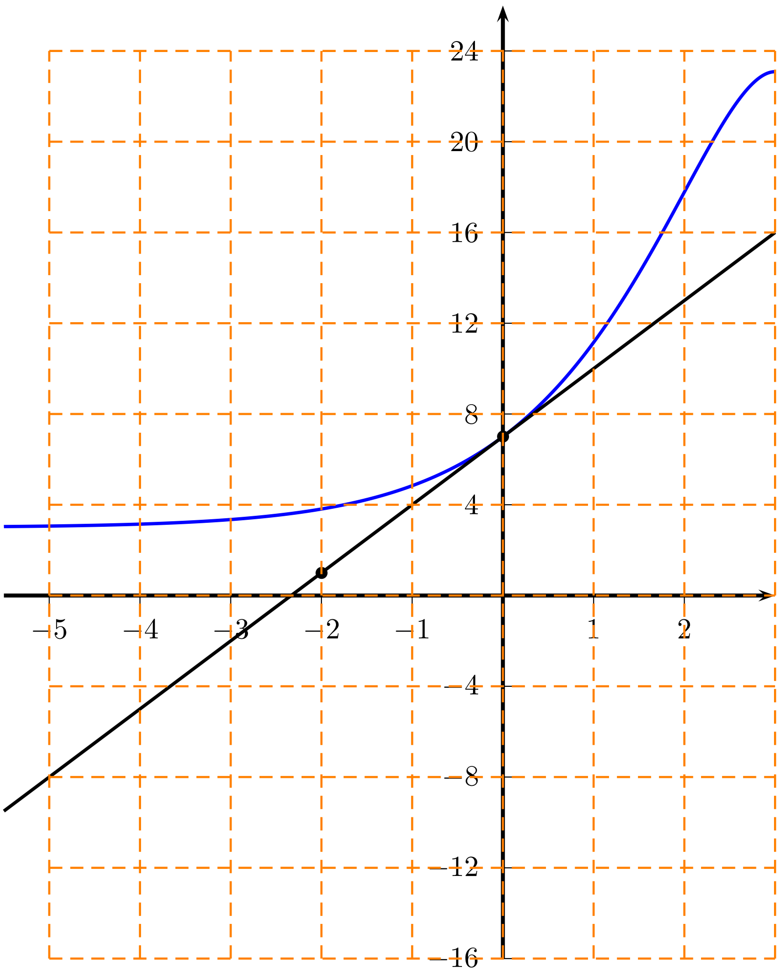
La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(0;7)$ et la droite T est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$. Le point $B(-2;1)$ appartient à la droite T.

1. À l'aide des données précédentes et du graphique, donner sans justification les valeurs de $f(0),\ f'(0)$ et $f'(3)$.
2. Exprimer $f(0)$ en fonction de b et de c.
3. (a) Montrer que, pour tout réel $x,\ f'(x) = (ax+a+b)e^x$.

   (b) En déduire les expressions de $f'(0)$ et de $f'(3)$ en fonction de a et de b.
4. (a) En utilisant les résultats des questions 1. , 2. et 3.b , montrer que $a,\ b$ et c vérifient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b+c & = & 7 \\ a+b & = & 3 \\ 4a+b & = & 0 \end{array}\right.$$

   (b) Déterminer les valeurs de $a,\ b$ et c puis donner l'expression de $f(x)$.



Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 3 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0\ .$$

2. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives :

$$z_A = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2} \quad \text{et} \quad z_B = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}$$

   (a) Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B.

   (b) Écrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

   (c) Placer les points A et B dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   (a) Construire le point C, image du point B par la rotation r.

   (b) Calculer l'affixe z_C du point C. On donnera d'abord la forme exponentielle de z_C puis sa forme algébrique.

4. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

   (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AO}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.

   (b) En déduire l'affixe z_D du point D, image du point B par la translation t.

   (c) Construire le point D.

5. Montrer que le triangle OBD est équilatéral.

6. Montrer que le triangle BCD est rectangle.

Problème (10 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + 5y = 5x^3 + 3x^2 + 5\ ,$$

où y représente une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) \quad : \quad y' + 5y = 0$.

2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction u, définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax^3 + b$, soit solution de l'équation différentielle (E).

3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = k\mathrm{e}^{-5x} + x^3 + 1$ où k est un nombre réel.

   (a) Vérifier que h est solution de l'équation (E).

   (b) Déterminer le réel k tel $h(0) = -2$.

Partie B : Étude de la fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3\mathrm{e}^{-5x} + x^3 + 1 \ .$$

1. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. (a) On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. (a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 1]$.
   (c) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du nombre réel α.
   (d) Déterminer selon les valeurs du réel x, le signe de $f(x)$.

Partie C : Courbe représentative de la fonction

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 8 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^3 + 1$.
   La représentation graphique Γ de la fonction u, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est tracée sur la feuille annexe.
   (a) On pose, pour tout réel x, $d(x) = f(x) - u(x)$.
   Étudier le signe de $d(x)$.
   (b) En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la courbe Γ.
2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera dans chaque cas la valeur décimale arrondie au centième de $f(x)$.

x	$-0,2$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$								

3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère figurant sur la feuille annexe.

Partie D : Calcul d'une aire

On appelle $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur la feuille annexe la partie $\mathcal{P}$ du plan.
2. Calculer la mesure, en unités d'aire, de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie $\mathcal{P}$ du plan.
   Dans cette question particulièrement, toute trace de recherche, même incomplète, figurant sur la copie sera prise en compte dans l'évaluation.

Feuille annexe

NOM :

PRÉNOM :