Devoir de Mathématiques n°7

Exercice

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique 2 cm.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
   (b) Calculer le module et un argument de chacune des solutions.
2. Soient A et M les points d'affixes respectives $a = \sqrt{3} + i$ et $m = \sqrt{3} - i$.
   (a) Placer A et M dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, en indiquant une méthode de construction.
   (b) On appelle B et C les points d'affixes respectives $b = ia$ et $c = ib$.
   Calculer b et c sous forme algébrique, puis placer B et C dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
   (c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
   (d) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré. Placer D sur la figure.

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - 2\ln x$.

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g.
   Déterminer $g'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   (L'étude des limites aux bornes de l'ensemble de définition n'est pas demandée.)
3. Calculer $g(1)$. En déduire que g est strictement positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unités graphiques graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et par Γ la courbe d'équation $y = \ln x$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en zéro. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On désigne par f' la fonction dérivée de f.
   (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. On définit sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction h par $h(x) = f(x) - \ln x$.
   (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h.
   (b) Étudier le signe de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la courbe Γ.
5. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
6. Tracer les courbes $\mathcal{C}$, Γ et la droite Δ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie C

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, par $H(x) = -\left(\dfrac{1 + \ln x}{x}\right)$.
   Montrer que H est une primitive de h sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1.
   Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, la courbe Γ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
3. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.